



ΘΕΜΑ Α

A1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 133

A2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 51

A3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 185

A4. Λ Σ Σ Σ Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε:

$$A_h = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$$

$$A_h = \{x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} + 1 > 1\}$$

$$A_h = \{x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} > 0\}$$

$$A_h = \{x \in [2, +\infty) \text{ και } x - 2 > 0\}$$

$$A_h = \{x \in [2, +\infty) \text{ και } x > 2\} = (2, +\infty)$$

Με τύπο : $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1)$

$h(x) = 2 \ln(\sqrt{x-2}) = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2)$, με $x > 2$.

B2.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} \cdot (x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0, \quad x > 2$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Άρα η h είναι «1-1», οπότε η h αντιστρέφεται.

$D_{h^{-1}} = h((2, +\infty)) = \mathbb{R}$ γιατί :

$A = (2, +\infty) \rightarrow$ (h αύξουσα & συνεχής) $h((2, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = (-\infty, +\infty)$, γιατί:

Αριστερό άκρο:

$$x - 2 = t > 0$$

$$t_0 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln t) = -\infty$$

Δεξιό άκρο:

$$x - 2 = t$$

$$t_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t) = +\infty$$

Εύρεση τύπου της αντίστροφης :

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x-2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

$$\Rightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2$$

$$\text{Άρα } h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

B3.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \right] = -\infty$$

$$x-2 = t \Rightarrow x-1 = t+1$$

$$t_0 = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\ln(t+1)}{t} \quad 0/0 \text{ (D.L.H.)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) = \lim_{t \rightarrow 0} (\ln t) = -\infty$$

$$\text{Επομένως: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \right] = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $y = x$ εφαπτόμενη της f στο $(0, f(0))$, άρα $f'(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{kx^4 + (3k-\mu)x^2 + \mu}{(x^2+1)^2}, \quad \text{άρα } f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (kx) = \kappa \cdot (+\infty)$$

- Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, αν $\kappa < 0$ ή $\kappa > 0$ αντίστοιχα, άτοπο, διότι έχει οριζόντια ασύμπτωτη
- Αν $\kappa = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, τότε η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Τελικά, $\kappa = 0$.

Γ2.

$$i) f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Μονοτονία

- για $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$, άρα f : γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$
- για $x \in (-1, 1)$ είναι $f'(x) > 0$, άρα f : γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$

Ακρότατα

- η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -1$ το $f(-1) = -1/2$ και
- η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1/2$.

ii)

$$A_1 = (-\infty, -1] \rightarrow f(A_1) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-\frac{1}{2}, 0)$$

$$A_2 = (-1, 1) \rightarrow f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$A_3 = [1, +\infty) \rightarrow f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{Άρα, } f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + a^2 \quad (1)$$

- για $a \neq 0$ είναι $a^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + a^2 > \frac{1}{2}$, δηλαδή $\frac{1}{2} + a^2 \notin f(\mathbb{R})$ και η (1) είναι αδύνατη
- για $a = 0$ είναι $\frac{1}{2} + a^2 = \frac{1}{2} \in f(A_3)$ όπου f μονότονη, άρα 1-1 και η (1) έχει μοναδική λύση την $x = 1$

Γ3.

i) Είναι $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx \xrightarrow{\nu=\nu+1} I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx$ προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} \quad (2)$$

$$ii) \text{ για } v = 0, I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \ln\sqrt{2}$$

$$\text{Από (2) για } v = 0 \text{ είναι } I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$$

$$\text{Από (2) για } v = 1 \text{ είναι } I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \ln\sqrt{2} = \ln\sqrt{2} - \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Ορίζω $h(x) = g(x) + x$ στο $[-1, 0]$.

▷ h : συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πράξεις συνεχών [συναρτήσεων].

$$\text{▷ } h(0) = g(0)$$

$$\rightarrow \text{έχουμε } 0 < g(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow_{x=0} 0 < g(0) < 1 \Rightarrow h(0) > 0$$

$$\text{▷ } h(-1) = g(-1) - 1$$

$$\rightarrow \text{έχουμε } 0 < g(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow_{x=-1} 0 < g(-1) < 1 \Rightarrow -1 < h(-1) < 0, \text{ άρα } h(-1) < 0$$

Άρα, από Θ. Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$:

$$h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0.$$

• h : παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $h'(x) = g'(x) + 1$

$$\text{Εφόσον } g'(x) \neq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow h'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Επίσης η g' είναι συνεχής, άρα h' : συνεχής

$$\Rightarrow \text{η } h' \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R} \Rightarrow h: \text{ γν. μονότονη}$$

$$\Rightarrow h: \text{ «1-1», οπότε η } x_1 \text{ είναι [μοναδική] ρίζα της } g(x) + x = 0. \quad \checkmark$$

Δ2.

$$\text{▷ } \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x) - f(0)] / (x - 0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x^2 \cdot (g(x) + x) - 0] / x = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot (g(x) + x) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (g(x) + x) = g(0) \text{ διότι } g: \text{ συνεχής.}$$

$$\begin{aligned} \triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) - f(0)] / (x - 0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - kx) / x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \cdot \eta\mu x / x + \epsilon\phi x / x - k) = 2 + 1 - k = 3 - k \end{aligned}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x / x = 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \epsilon\phi x / x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x / x \cdot 1 / \sigma\upsilon\nu x) = 1 \cdot (1 / 1) = 1$$

\triangleright Εφόσον f : παραγωγίσιμη $\Rightarrow f$: παραγωγίσιμη στο $x = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x) - f(0)] / (x - 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) - f(0)] / (x - 0)$$

$$\Rightarrow 3 - k = 0 \Rightarrow \mathbf{k = 3}$$

Δ3.

i) $f(x) = 2 \cdot \eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$ στο $[0, \pi/2]$

$$f'(x) = (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu x + 1 / \sigma\upsilon\nu^2 x - 3 = (2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1) / \sigma\upsilon\nu^2 x, \quad x \in [0, \pi/2]$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \cdot (2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = -1/2$$

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow x = 0 \quad (\sigma\upsilon\nu x = -1/2 : \text{αδύνατη, διότι } x \in (0, \pi/2) \text{ και } \sigma\upsilon\nu x > 0)$$

Πίνακας προσήμου της f' στο $[0, \pi/2]$:

x	$0 \dots\dots\dots \pi/2$
$(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2$	+
$2\sigma\upsilon\nu x + 1$	+
$\sigma\upsilon\nu^2 x$	+
$f'(x)$	+
$f(x)$	\nearrow (γν. αύξουσα)

Άρα f : γν. αύξουσα στο $[0, \pi/2]$.

- για $x \geq 0 \Rightarrow_{(f \uparrow)} f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$.

Δ4.

i) Έχουμε $f(x) = x^2 \cdot (g(x) + x)$ στο $(-\infty, 0]$.

Ορίζω την $f(x) = x^2 \cdot h(x)$ στο $[x_1, 0]$ όπου $h(x) = g(x) + x$ από το ερώτημα Δ1.

→ για $-1 < 0$ έχουμε $h(-1) < h(0)$ και h : γν. μονότονη

⇒ h : γν. αύξουσα στο $[x_1, 0]$.

→ $x_1 < x < 0 \Leftrightarrow_{(h \uparrow)} h(x_1) < h(x) < h(0) \Rightarrow 0 < h(x)$

(αφού από Δ1 είναι $h(x_1) = 0$)

Επίσης $x^2 \geq 0, \forall x \in [x_1, 0]$.

Συνεπώς $f(x) \geq 0, \forall x \in [x_1, 0]$.

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{\pi/3} f(x) \cdot dx$$

$$\rightarrow \phi(x_2) = 0 \Rightarrow 3f(x_2) - \pi = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = \pi/3$$

→ $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, \pi/2]$ (από Δ3 i)

• $f(x) \geq 0, \forall x \in [x_1, 0]$ (από Δ4 i)

⇒ $f(x) \geq 0, \forall x \in [x_1, \pi/3]$ και f : συνεχής στο $[x_1, \pi/3]$

• Ο άξονας γ'γ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά (ίσου εμβαδού) χωρία ⇒

$$\Rightarrow \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\pi/3} f(x) dx.$$

Υπολογισμός με παραγοντική ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx &= \int_{x_1}^0 x^3 \cdot (g(x))' dx = [x^3 \cdot g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 (x^3)' \cdot g(x) dx = \\ &= -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^0 3x^2 \cdot g(x) dx \quad [g(x_1) = -x_1] \\ &= x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx \quad (1) \end{aligned}$$

• Έχουμε $f(x) = x^2 \cdot (g(x) + x)$ στο $[x_1, 0] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 g(x) + x^3 \Leftrightarrow x^2 g(x) = f(x) - x^3$$

$$\text{Οπότε } \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx = \int_{x_1}^0 (f(x) - x^3) dx = \int_{x_1}^0 f(x) dx - \int_{x_1}^0 x^3 dx$$

$$\rightarrow \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\pi/3} f(x) dx = \int_0^{\pi/3} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx =$$

$$= [-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - 3x^2/2]_0^{\pi/3} =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu(\pi/3) - \ln|\sigma\upsilon\nu(\pi/3)| - 3 \cdot (\pi^2/9)/2 + 2 \cdot 1 = 1 - \ln(1/2) - \pi^2/6 = 1 + \ln 2 - \pi^2/6$$

$$\rightarrow \int_{x_1}^0 x^3 dx = [x^4/4]_{x_1}^0 = -x_1^4/4$$

$$\text{Άρα (1)} \Rightarrow \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx = x_1^4 - 3(1 + \ln 2 - \pi^2/6 + x_1^4/4) =$$

$$= x_1^4 - 3 - 3\ln 2 + \pi^2/2 - 3x_1^4/4$$

$$\text{Τελικό αποτέλεσμα: } \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx = x_1^4/4 + \pi^2/2 - 3\ln 2 - 3$$

Επιμέλεια:

Καλαϊτζίδης Θεόδωρος, Πανάγου Γεώργιος, Ντζουροπάνος Δημήτρης, Πολύδωρος Γιώργος, Πετρά Ζωή, Νικηφόρος Εμμανουήλ, Μαρζάβα Μαρία, Νατσιούλας Αθανάσιος, Χουδετσανάκη Ελένη, Κοσμαδάκης Εμμανουήλ, Μπιτσανάκης Στέλιος, Πρώιας Δημήτρης, Λουλακάς Γιώργος, Καραγεώργος Θεμιστοκλής, Σπηλιωτόπουλος Νίκος, Χειμωνά Γεωργία, Φουρτούνη Μαρία Ανδριάννα, Καραμπετάκη Δομνίκη, Αντωνιάδης Σωκράτης

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Κερατσίνι, Διαδικτυακό, Καλαμάτα, Ηράκλειο Κρήτης (Άγιος Ιωάννης και 62 Μαρτύρων), Λαμία, Φιλοθέη/Ψυχικό, Λάρισα, Αμφιάλη, Νίκαια, Καισαριανή, Παγκράτι Κέντρο, Θεσσαλονίκη Τούμπα, Περιστέρι Νέα Ζωή, Καβάλα