ΘΕΜΑ Α
Α1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 133
Α2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 51
Α3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 185
Α4. Λ Σ Σ Σ Λ

ΘΕΜΑ Β
Β1. Έχουμε:

$$A_h = \{x \in A_g \;\kappa\alpha\iota\; g(x) \in A_f\}$$
$$A_h = \{x \in [2,+\infty) \;\kappa\alpha\iota\; \sqrt{x-2}+1 > 1\}$$
$$A_h = \{x \in [2,+\infty) \;\kappa\alpha\iota\; \sqrt{x-2} > 0\}$$
$$A_h = \{x \in [2,+\infty) \;\kappa\alpha\iota\; x-2 > 0\}$$
$$A_h = \{x \in [2,+\infty) \;\kappa\alpha\iota\; x > 2\} = (2,+\infty)$$

Με τύπο : $h(x) = (f^\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2ln\big(\sqrt{x-2}+1-1\big)$
$h(x) = 2ln\big(\sqrt{x-2}\big) = ln\big(\sqrt{x-2}\big)^2 = ln(x-2)$, με $x > 2$.

Β2.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με

$h'(x) = 1 / (x-2) \cdot (x-2)' = 1 / (x-2) > 0$, $x > 2$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Άρα η h είναι «1-1», οπότε η h αντιστρέφεται.

$D_{h^{-1}} = h((2, +\infty))$

$A = (2, +\infty)$ → (h αύξουσα & συνεχής) $h((2, +\infty)) = (\lim_{x\to 2^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)) = (-\infty, +\infty)$, γιατί:

Αριστερό άκρο:

$x - 2 = t > 0$

$t_0 = \lim_{x\to 2^+} (x-2) = 0$

$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{t\to 0^+} (\ln t) = -\infty$

Δεξιό άκρο:

$x - 2 = t$

$t_0 = \lim_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{t\to+\infty} (\ln t) = +\infty$

Εύρεση τύπου της αντίστροφης :

$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x-2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$

$\Rightarrow h^{-1}(y) = e^y + 2$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2\,,\quad x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to 2^+} [\ \ln(x-2) \cdot 2\ln(x-1) / (x-2)\ ] = -\infty$

$x-2 = t \Rightarrow x-1 = t+1$

$t_0 = \lim_{x\to 2} (x-2) = 0$

$\lim_{t\to 0} \ln(t+1)/t \ \ {}^{0/0}\ \text{(D.L.H.)}\ \ \lim_{t\to 0} 1/(t+1) = 1$

$\lim_{x\to 2} \ln(x-2) = \lim_{t\to 0} (\ln t) = -\infty$

Επομένως: $\lim_{x\to 2^+} [\ \ln(x-2) \cdot 2\ln(x-1) / (x-2)\ ] = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$

B3.

$\lim_{x\to 2^+} [\ \ln(x-2) \cdot 2\ln(x-1) / (x-2)\ ] = -\infty$

$x-2 = t \Rightarrow x-1 = t+1$

$t_0 = \lim_{x\to 2} (x-2) = 0$

$\lim_{t\to 0} \ln(t+1)/t \ \ {}^{0/0}\ \text{(D.L.H.)}\ \ \lim_{t\to 0} 1/(t+1) = 1$

$\lim_{x\to 2} \ln(x-2) = \lim_{t\to 0} (\ln t) = -\infty$

Επομένως: $\lim_{x\to 2^+} [\ \ln(x-2) \cdot 2\ln(x-1) / (x-2)\ ] = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$

Επιμέλεια:

Καλαϊτζίδης Θεόδωρος, Πανάγου Γεώργιος, Ντζουροπάνος Δημήτρης, Πολύδωρος Γιώργος, Πετρά Ζωή, Νικηφόρος Εμμανουήλ, Μαρζάβα Μαρία, Νατσιούλας Αθανάσιος, Χουδετσανάκη Ελένη, Κοσμαδάκης Εμμανουήλ, Μπιτσανάκης Στέλιος, Πρώιας Δημήτρης, Λουλακάς Γιώργος, Καραγεώργος Θεμιστοκλής, Σπηλιωτόπουλος Νίκος, Χειμωνά Γεωργία, Φουρτούνη Μαρία Ανδριάννα, Καραμπετάκη Δομνίκη, Αντωνιάδης Σωκράτης

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Κερατσίνι, Διαδικτυακό, Καλαμάτα, Ηράκλειο Κρήτης (Άγιος Ιωάννης και 62 Μαρτύρων), Λαμία, Φιλοθέη/Ψυχικό, Λάρισα, Αμφιάλη, Νίκαια, Καισαριανή, Παγκράτι Κέντρο, Θεσσαλονίκη Τούμπα, Περιστέρι Νέα Ζωή, Καβάλα