ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ
Τα καλύτερα Φροντιστήρια της πόλης

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1. Σχολικό σελ. 93**

**Α2. Σχολικό σελ 16**

**Α3.**

**α. Λ**

**β. Σ**

**γ. Σ**

**δ. Σ**

**ε. Λ**

**Α4. α ) ο**

**β) 2x**

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1)** Έχουμε $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu \Rightarrow \nu_1 + 40 = 50 \Rightarrow \nu_1 = 10.$

Από την σχέση $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}\,100$ έχουμε

$f_1\% = \frac{10}{50}\,100 = 20\%$

$$f_2\% = \frac{15}{50}100 = 30\%$$

$$f_3\% = \frac{11}{50}100 = 22\%$$

$$f_4\% = \frac{8}{50}100 = 16\%$$

$$f_5\% = \frac{6}{50}100 = 12\%$$

Επιπλέον για τις αθροιστικές συχνότητες ισχύει:

$N_1 = \nu_1 = 10$
$N_2 = \nu_1 + \nu_2 = 25$
$N_3 = \nu_3 + N_2 = 36$
$N_4 = \nu_4 + N_3 = 44$

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

| $x_i$ | $\nu_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 20 | 10 |
| 1 | 15 | 30 | 25 |
| 2 | 11 | 22 | 36 |
| 3 | 8 | 16 | 44 |
| 4 | 6 | 12 | 50 |
| **ΣΥΝΟΛΟ** | 50 | 100 | |

**Β2)** $\bar{X} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 0 + 0{,}3 + 0{,}44 + 0{,}48 + 0{,}48 = 1{,}7$ ώρες.

**Β3)** $\nu = 50$ άρτιος άρα η διάμεσος $\delta$ ισούται με το ημιάρθοισμα των δύο μεσέων παρατηρήσεων. Έστω οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά $t_1, t_2, \ldots \ldots, t_{50}$

$$\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

**Β4) α)** Το ζητούμενο ποσοστό είναι το $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 100 - f_5\% = 88\%$

**β)** $\bar{y} = \bar{x} + c$

$\bar{y} = 1{,}7 + 4 = 5{,}7$

$\bar{y} = 5{,}7$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής ως πολυωνυμική για κάθε πραγματικό αριθμό x.

$f'(x) = -6x^2 + 12x, x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0$

$-6x^2 + 12x = 0 =>$

$-6x \cdot (x-2) = 0$

x = 0 ή x = 2

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Ακολουθεί ο πίνακας μονοτονίας:

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | - | 0 | + | 0 | - | |
| F(x) | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2, +\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,2]$

**Γ2.** Η παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = \alpha$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$ το $f(2) = 8 + \alpha$.

Έχουμε ότι:

$\frac{f(0)+f(2)}{2} = -8$ =>

$\frac{\alpha+8+\alpha}{2} = -8$ =>

$2\alpha + 8 = -16$ =>

$2\alpha = -24$ =>

$\alpha = -12$

**Γ3.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $M(1, f(1)) = (1,-8)$ είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$.

Έχουμε ότι $\lambda = f'(1) = 6$. Άρα: $y = 6x + \beta$.

Επειδή το σημείο ανήκει στην ευθεία της εφαπτομένης τότε θα επαληθεύει την εξίσωσή της οπότε θα ισχύει:

$-8 = 6 \cdot 1 + \beta$ =>

$\beta = -14$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$y = 6x - 14$.

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

**Γ4.** Αφού η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x = 2 τότε:

$f(x) \leq f(2)$ για κάθε $x \geq 2$

$-2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4$

$-2x^3 + 6x^2 - 12 + 4 \leq 0$

$-2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0$

Διαιρώντας με -2 έχουμε:

$x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$,
άρα $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$
και $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$
συνεπώς $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$

Δ2. Για λ=-4 είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2 - 8x + 7$ και $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $x = 7$

Για $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ $\;είναι\; f'(x) > 0$ και f συνεχής άρα f γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]\; και\; [7, +\infty)$

Για $x \in (1,7)\; είναι\; f'(x) < 0$ και f συνεχής άρα γνησίως φθίνουσα στο [1,7]

*Δ3.* Είναι 2020<2025 και f γνησίως αύξουσα στο $[7, +\infty)$ άρα f(2020)<f(2025) και f(2025)-f(2020)>0

Επιπλέον $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$ και f γνησίως φθίνουσα στο [1,7] άρα $f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right)$ και $f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

Τελικά $A = \frac{f(2025)-f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0$

Δ4. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)-f''(x)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-2x+8+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-10x+16}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{x-2} = -12\sqrt{3}$


**Επιμέλεια:**

Οικονόμου Ελένη, Πανάγου Γιώργος, Φουρτούνη Μαρία-Ανδριάννα, Καραμπετάκη Δομνίκη, Παπανικολάου Παναγιώτης, Βασιλειάδου Σοφία, Λουλακάς Γιώργος, Ντούκας Σταύρος

**και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**: Πειραιάς, Κερατσίνι, Καβάλα, Πέραμα, Νίκαια, Περιστέρι Νέα Ζωή, Παγκράτι Κέντρο, Νέος Κόσμος, Λευκάδα



Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ