ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 186

Α2. Σχολικό σελ. 76

Α3. Σχολικό σελ. 161

Α4.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$

Από την υπόθεση δίνεται ότι $f'(1) = 0$, επομένως

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

και παράγωγο

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Β2

Παρατηρούμε ότι

$$f(0) = 9 > 0,\ f(1) = 1,\ f(3) = -3 \text{ και } f(4) = 1$$

Ακόμη

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Επομένως

$$f'(x) > 0 \text{ για } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \text{ και } f'(x) < 0 \text{ για } x \in (1, 3)$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα [0,1] ως πολυωνυμική και $f(0) \cdot f(1) < 0$, επομένως από Θ Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Επειδή όμως $f'(x) > 0$ για $x \in [0,1]$, η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 στο [0,1], άρα το x_1 είναι μοναδικό.

Όμοια στα διαστήματα [1,2] και [2,3]

Β3
Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f''(x)=6x-12$$

Είναι

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2$$

και

$$f''(x)<0 \text{ για } x<2 \text{ και } f''(x)>0 \text{ για } x>2$$

Επομένως η f είναι κοίλη για $x\in(-\infty,2]$, κυρτή για $x\in[2,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $M(2,f(2))=M(2,-1)$

Β4
Η g είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$g'(x)=1+f'(x)$$

Η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο Α έχει εξίσωση

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$$

Για $x=0$ έχουμε

$$y=-\xi\cdot f'(\xi)+f(\xi)$$

Η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο Β έχει εξίσωση

$$y-g(\xi)=g'(\xi)(x-\xi)\Leftrightarrow y-\xi-f(\xi)=\left(1+f'(\xi)\right)(x-\xi)$$

Για $x=0$ έχουμε

$$y-\xi-f(\xi)=\left(1+f'(\xi)\right)(0-\xi)\Leftrightarrow$$
$$y-\xi-f(\xi)=-\xi-\xi\cdot f(\xi)\Leftrightarrow$$
$$y=f(\xi)-\xi\cdot f(\xi)$$

Δηλαδή οι εφαπτόμενες ευθείες τέμνονται πάνω στον άξονα y'y

ΘΕΜΑ Γ

Γ1
Έχουμε

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(e^x\eta\mu x\right)=1\cdot0=0$$

και

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x^2+x}\right)=0$$

και

$$f(0)=0$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0.
Ακόμη

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot1=1$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x(x+1)}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=+\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Γ2

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ επομένως δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Ακόμη

$$-1\le ημx\le 1\Leftrightarrow -e^x\le e^x ημx\le e^x$$

Είναι

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-e^x\right)=0 \text{ και } \lim_{x\to -\infty}\left(e^x\right)=0$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι

$$\lim_{x\to -\infty}\left(e^x ημx\right)=0$$

που σημαίνει ότι στο $-\infty$ υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη ο άξονας x'x
Ακόμη

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x(x+1)}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1$$

και

$$\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

που σημαίνει ότι στο $+\infty$ υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη η ευθεία $y=x+\frac{1}{2}$

Γ3

Θα πρέπει να ισχύει

$$f(x)=y\Leftrightarrow e^x ημx=x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2e^x ημx-x-1=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=2e^x ημx-x-1,\ x\in[-\pi,0]$$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
Παρατηρούμε ότι

$$g(-\pi)=2e^{-\pi}\cdot 0-(-\pi)-1=\pi-1>0$$

και

$$g(0)=2e^0\cdot ημ0-1=-1<0$$

Επομένως από Θ Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-\pi,0)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi)=0\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow f(\xi)=x+\frac{1}{2}$$

Γ4
Έχουμε

$$y=\sqrt{x^2+x} \Leftrightarrow y(t)=\sqrt{x^2(t)+x(t)}$$

Επομένως

$$y'(t)=\frac{1}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}\cdot\left(x^2(t)+x(t)\right)'=\frac{2x'(t)x(t)+x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}$$

Από την υπόθεση δίνεται $x'(t_o)=y'(t_o)$ επομένως

$$x'(t_o)=\frac{x'(t_o)(2x(t_o)+1)}{2\sqrt{x^2(t_o)+x(t_o)}} \overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$1=\frac{2x(t_o)+1}{2\sqrt{x^2(t_o)+x(t_o)}} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2(t_o)+x(t_o)}=2x(t_o)+1 \Leftrightarrow$$

$$4\left(x^2(t_o)+x(t_o)\right)=4x^2(t_o)+4x(t_o)+1 \Leftrightarrow$$

$$4x^2(t_o)+4x(t_o)=4x^2(t_o)+4x(t_o)+1 \Leftrightarrow$$

$0=1$ που είναι αδύνατο.

Άρα δεν υπάρχει t_o τέτοιο ώστε $x'(t_o)=y'(t_o)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1
Από την υπόθεση δίνεται

$$f'(1)=2$$

Έχουμε υπόψιν ότι

$$\left(x^{\ln x}\right)'=\left(e^{\ln^2 x}\right)'=\frac{2\ln x}{x}\cdot x^{\ln x}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$g'(x)=\frac{f(x)\cdot x^{\ln x}-F(x)\cdot\frac{2\ln x}{x}\cdot x^{\ln x}}{x^{2\ln x}}=$$

$$=\frac{x^{\ln x}\cdot\left(xf(x)-2F(x)\ln x\right)}{x^{2\ln x}}=$$

$$=\frac{xf(x)-2F(x)\ln x}{x^{\ln x}}$$

Όμως από την υπόθεση δίνεται $xf(x)=2F(x)\ln x$, οπότε τελικά

$$g'(x)=0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

που σημαίνει ότι η g είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$

Δ2

i)

- Δίνεται $xf(x)=2f(x)\ln x$, οπότε για $x=1$ έχουμε

$$f(1)=0$$

- Από την υπόθεση δίνεται ότι η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=2x$, επομένως

$$f'(1)=2$$

- Με αυτά υπόψιν έχουμε

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to1}\frac{f(1)}{\frac{1}{x}}=\frac{2}{1}=2$$

ii)

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2F(x)\cdot\ln x}{x}}{\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{2F(x)}{x}=2F(1)$$

Η F είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής.

ii)

Έχουμε

$$f'(1)=2\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2\,(1)$$

και

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}=2F(1)$$

Θεωρούμε

$$g(x)=\frac{f(x)}{\ln x}$$ κοντά στο 1.

Άρα

$$f(x)=g(x)\cdot\ln x$$

και

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}g(x)\cdot\ln x=2\cdot0=0$$

Επίσης

$$x\cdot f(x)=2F(x)\cdot\ln x$$

Άρα

$$\left(x\cdot f(x)\right)'=\left(2F(x)\cdot\ln x\right)'\Leftrightarrow$$

$$f(x)+xf'(x)=2f(x)\ln x+\frac{2F(x)}{x}$$

Για $x=1$ είναι

$$f(1)+1\cdot f'(1)=2f(1)\cdot\ln1+\frac{F(1)}{1}\Leftrightarrow F(1)=1$$

Δ3

Η συνάρτηση g είναι σταθερή, επομένως υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$g(x)=c\Leftrightarrow\frac{F(x)}{x^{\ln x}}=c$$

Είδαμε ότι $F(1)=1$, επομένως

$$\frac{F(1)}{1^{\ln 1}}=c\Leftrightarrow c=1$$

Άρα τελικά

$$\frac{F(x)}{x^{\ln x}}=1\Leftrightarrow F(x)=x^{\ln x}$$

Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$F'(x)=\left(x^{\ln x}\right)'=x^{\ln x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x},\ x>0$$

$$F'(x)>0\Leftrightarrow x^{\ln x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}>0$$

Για $x>0$ είναι $x^{\ln x}>0$ και $\frac{1}{x}>0$, επομένως

$$F'(x)>0\Leftrightarrow \ln x>0\Leftrightarrow x>1$$

Επομένως η F

- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$
- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$
- παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $F(1)=1$, δηλαδή $F(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$

Για κάθε $0<x<1$ έχουμε

$$x^2<x\Leftrightarrow F\left(x^2\right)>F(x)\Leftrightarrow F\left(x^2\right)-F(x)>0$$

και

$$-(x-1)^2<0$$

οπότε η εξίσωση $F\left(x^2\right)-F(x)=-(x-1)^2$ είναι αδύνατη.

Για κάθε $x>1$ έχουμε

$$x^2>x\Leftrightarrow F\left(x^2\right)>F(x)\Leftrightarrow F\left(x^2\right)-F(x)>0$$

και

$$-(x-1)^2<0$$

οπότε η εξίσωση $F\left(x^2\right)-F(x)=-(x-1)^2$ είναι αδύνατη

Για $x=1$ είναι

$$F\left(1^2\right)-F(1)=-(1-1)^2 \text{ που ισχύει}$$

Άρα η $x=1$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $F\left(x^2\right)-F(x)=-(x-1)^2$

Δ4

Γνωρίζουμε ότι

$$e^x \ge x+1$$

$$F(x)=x^{\ln x}=e^{\ln^2 x}$$

Επομένως

$$e^{\ln^2 x} \ge \ln^2 x+1$$

Με αυτά υπόψιν έχουμε

$$\int_1^e \left(\ln^2 x+1\right)dx=\int_1^e \ln^2 x dx+\int_1^e 1dx=$$

$$=\int_1^e (x)' \ln^2 x dx+e-1=$$

$$=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot 2\ln x\frac{1}{x}dx+e-1=$$

$$=\left[2(\ln e)^2-1\cdot\ln 1\right]-2\int_1^e \ln x dx+e-1=$$

$$=e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e+e-1=$$

$$=e-2\left[(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)\right]+e-1=$$

$$=e-2(+1)+e-1=2e-3$$

Επιμέλεια:

Καλαϊτζίδης Θεόδωρος, Πανάγου Γεώργιος, Ντζουροπάνος Δημήτρης, Ντίμερης Σπύρος, Οικονόμου Ελένη, Σπυρόπουλος Παναγιώτης, Βανούσης Χρίστος, Πετρά Ζωή, Καραγεώργος Θεμιστοκλής, Καραμπετάκη Νίκη, Πρώιας Δημήτρης, Λουλακάς Γιώργος, Ελευθεράκης Παναγιώτης, Βουτουφιανάκης Μάνθος, Σκουλάξενος Βαγγέλης, Κοσμαδάκης Μάνος, Βελονάκη Νίκη, Σπανάκης Μιχάλης, Αντωνιάδης Σωκράτης, Τσακιράκης Γιώργος, Νικηφόρος Εμμανουήλ, Ντούκας Σταύρος, Σπηλιωτόπουλος Νίκος

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Κερατσίνι, Διαδικτυακό, Μοσχάτο, Περιστέρι Νέα Ζωή, Νίκαια, Καβάλα, Φιλοθέη/Ψυχικό, Λαμία, Αμφιάλη, Ηράκλειο Κρήτης Αγ. Ιωάννης, Ηράκλειο Κρήτης 62 Μαρτύρων, Λευκάδα