

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελ. 186

A2. Σχολικό σελ. 76

A3. Σχολικό σελ. 161

A4.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$

Από την υπόθεση δίνεται ότι $f'(1) = 0$, επομένως

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$$

Επομένως η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

και παράγωγο

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

B2

Παρατηρούμε ότι

$$f(0) = 9 > 0, f(1) = 1, f(3) = -3 \text{ και } f(4) = 1$$

Ακόμη

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Επομένως

$$f'(x) > 0 \text{ για } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \text{ και } f'(x) < 0 \text{ για } x \in (1, 3)$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως πολυωνυμική και $f(0) \cdot f(1) < 0$, επομένως από Θ Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Επειδή όμως $f'(x) > 0$ για $x \in [0, 1]$, η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 στο $[0, 1]$, άρα το x_1 είναι μοναδικό.

Όμοια στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$

B3

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$f''(x) = 6x - 12$$

Είναι

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

και

$$f''(x) < 0 \text{ για } x < 2 \text{ και } f''(x) > 0 \text{ για } x > 2$$

Επομένως η f είναι κοίλη για $x \in (-\infty, 2]$, κυρτή για $x \in [2, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $M(2, f(2)) = M(2, -1)$

Επιμέλεια:

Καλαϊτζίδης Θεόδωρος, Πανάγου Γεώργιος, Ντζουροπάνος Δημήτρης, Ντίμερης Σπύρος, Οικονόμου Ελένη, Σπυρόπουλος Παναγιώτης, Βανούσης Χρίστος, Πετρά Ζωή, Καραγεώργος Θεμιστοκλής, Καραμπετάκη Νίκη, Πρώιας Δημήτρης, Λουλακάς Γιώργος, Ελευθεράκης Παναγιώτης, Βουτουφιανάκης Μάνθος, Σκουλάξενος Βαγγέλης, Κοσμαδάκης Μάνος, Βελονάκη Νίκη, Σπανάκης Μιχάλης, Αντωνιάδης Σωκράτης, Τσακιράκης Γιώργος, Νικηφόρος Εμμανουήλ, Ντούκας Σταύρος

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Κερατσίνι, Διαδικτυακό, Μοσχάτο, Περιστέρι Νέα Ζωή, Νίκαια, Καβάλα, Φιλοθέη/Ψυχικό, Λαμία, Αμφιάλη, Ηράκλειο Κρήτης Αγ. Ιωάννης, Ηράκλειο Κρήτης 62 Μαρτύρων, Λευκάδα